Μάθημα 10ο 24/03/16

ΑΣΚΗΣΗ 30 σελ. 44: Αν $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας, να υπολογιστούν οι ποσότητες $1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{n-1}$ και $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1}$

ΛΥΣΗ:

$\sqrt[n]{1}$

$\sqrt[n]{z}$, $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$$z_\kappa = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\kappa\pi}{n}\right), \kappa=0,1,\dots,n-1.$$

$1=1(\cos 0+i\sin 0)$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας δίνονται από τη σχέση: $\varepsilon_\kappa = \cos\frac{2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{n}$, $\kappa=0,\dots,n$

$\varepsilon_\kappa = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\kappa-1}$, $\kappa=2,3,\dots,n-1$.

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_{\kappa-1} = \cos\frac{2(\kappa-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(\kappa-1)\pi}{n}$$

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\kappa-1} = \left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2(\kappa-1)\pi}{n} = \frac{2\pi+2\kappa\pi-\cancel{2\pi}}{n} = \frac{2\kappa\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{n} = \varepsilon_\kappa.$$

$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{n-1} = 1.$

$$1+\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{n-1} = 1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2+\dots+\varepsilon_1^{n-1} \overset{\text{γεωμετρική πρόοδος}}{=} \frac{1-\varepsilon_1^n}{1-\varepsilon_1} = \frac{0}{1-\varepsilon_1} = 0.$$

$\varepsilon_\kappa = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\kappa-1}$, $\kappa=2,\dots,n-1$.

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1^2$

$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_1^3$

$$\varepsilon_1^n = \cos\left(\frac{2\pi}{\cancel{n}}\cancel{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{n}}\cancel{n}\right) = \cos 2\pi + \cancel{i\sin 2\pi}^{0} = 1$$

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_1^3 \cdots \varepsilon_1^{n-1} = \varepsilon_1^{\underbrace{1+2+\dots+n-1}_{\text{αριθμητική πρόοδος}}} = \varepsilon_1^{\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)} = \varepsilon_1^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}\right) =$

$= \cos((n-1)\cdot\pi) + \cancel{i\sin((n-1)\pi)}^{=0} =$

$= \cos((n-1)\cdot\pi)$

Αν n άρτιος $\Rightarrow n-1$ περιττός

$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} = \cos((n-1)\pi) = -1$

Αν n περιττός $\Rightarrow n-1$ άρτιος

$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1} = \cos((n-1)\pi) = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.5.1 σελ. 80: Θα υπολογίσουμε το άθροισμα των καμπυλών γ_1 και γ_2 με αντίστοιχες παραμετρικές παραστάσεις

$z_1 = \frac{1+i}{2} t - 2 - i, \quad t \in [2,4]$.

$z_2 = \frac{t}{3}(2-i) + \frac{2}{3}(1+i), \quad t \in [-1,2]$

$z(t), \ t \in [0,1] \quad , \quad \gamma_1 + \gamma_2$.

$E(a,b) = \{ z \in \mathbb{C} : z = a + tb, \ t \in \mathbb{R} \}$.

$z_1: \quad E\left(-2-i, \frac{1+i}{2}\right)$

$z_2: \quad E\left(\frac{2}{3}(1+i), \frac{2-i}{3}\right)$

$\underline{z_1}$:

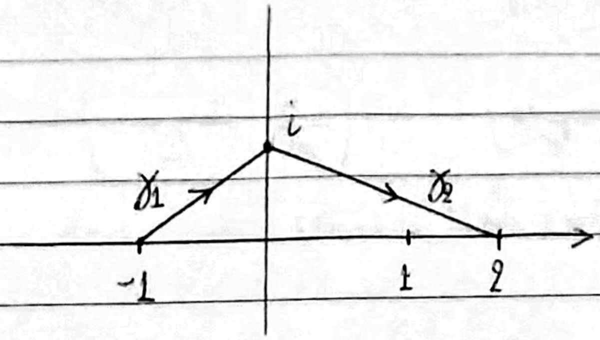
$z_1(2) = \frac{1+i}{2} 2 - 2 - i = 1 + \cancel{i} - 2 - \cancel{i} = -1$

$z_1(4) = \cdots = i$

$\underline{Z_2}$:

$Z_2(-1) = i$

$Z_2(2) = 2$



Παρατηρώ ότι $Z_1(4) = Z_2(-1)$

$\Uparrow$ τελικό σημείο της γ_1 $\quad$ $\Downarrow$ αρχικό σημείο της γ_2.

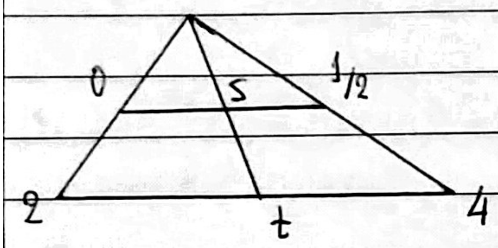
$$Z(s) = \begin{cases} Z_1^*(s), & s \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ Z_2^*(s), & s \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

→ επιλέγω οποιονδήποτε αριθμό για να σπάσω το διάστημα.

$\underline{Z_1}$:

$t(s) =$

$t : \underset{s}{[0, 1/2]} \to \underset{t(s)}{[2, 4]}$.



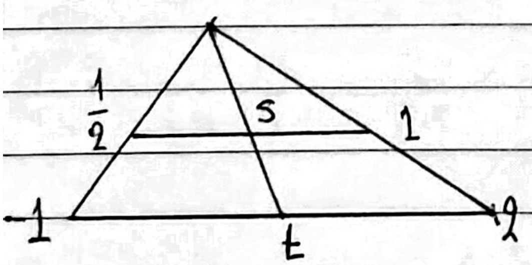
$$\frac{s-0}{t-2} = \frac{\frac{1}{2}-0}{4-2} \Rightarrow t = 4s+2$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{Z_1^*(s)}}{Z_1(t(s))} = \frac{1+i}{2}(4s+2) - 2 - i = 2(1+i)s - 1 \quad , s \in [0, 1/2].$$

$\underline{Z_2}$:

$t(s)$

$t : [1/2, 1] \to [-1, 2]$.



$$\frac{s-\frac{1}{2}}{t-(-1)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-(-1)} \Rightarrow t = 6s-4$$

$$\underset{\substack{\| \\ z_2^*(s)}}{z_2(t(s))} = \frac{6s-4}{2-i} + \frac{2}{3}(1+i) = 2(2-i)s - 2(1-i) \quad , s\in[1/2, 1]$$

$$z(t) = \begin{cases} 2(1+i)s - 1 & s\in[0, 1/2] \\ 2(2-i)s - 2(1-i) & , s\in[1/2, 1] \end{cases}$$

2ος τρόπος:

z_1//

$t: [0, 1/2] \to [2, 4]$

$t = \mu s + v$

Για $s=0 \to t=2 \Rightarrow 2 = v$

$s=\frac{1}{2} \to t=4 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}\mu + v$ $\Big\}$ $\mu = 4$.

z_2//

$t: [1/2, 1] \to [-1, 2]$.

$t = \mu s + v$

Για $s=\frac{1}{2} \to t = -1 \Rightarrow v = -4$.

$s=1 \to t=2 \Rightarrow \mu = 6$

ΑΣΚΗΣΗ 6 σελ. 66: Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου, των οποίων η χορδική απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $|z|$.

ΛΥΣΗ: $$\chi(z,w) = \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\cdot\sqrt{1+|w|^2}} & , z, w\in\mathbb{C} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} & , z\in\mathbb{C}, w=\infty \end{cases}$$

$\chi(z,0) = |z|$

$$\frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} = |z| \Rightarrow 2|z| = |z|\sqrt{1+|z|^2} \Rightarrow |z|(2-\sqrt{1+|z|^2}) = 0.$$

$|z| = 0$ ή $2 = \sqrt{1+|z|^2}$

$z = 0$ $\quad 1+|z|^2 = 4$

$|z|^2 = 3$

$|z| = +\sqrt{3}$ κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.